

ZNACIE? TO POSŁUCHAJCIE...

MARCIN PAWEŁ SADOWSKI

WYDZIAŁ FIZYKI, UNIwersYTET WARSZAWSKI, WARSZAWA

ARTYKUŁ OPUBLIKOWANY W CZASOPIŚMIE „MATEMATYKA – CZASOPISMO DLA NAUCZYCIELI”, 3(319)/2006, s. 156-158

BAJKA O KRÓLU, KTÓRY W SZACHY LUBIŁ GRYWAĆ

Dawno, dawno temu, w pewnym starożytnym królestwie żył sobie zły władca. Nie dbał on o swoich poddanych: lud królestwa cierpiał z biedy i głodu, a ziemie uprawne były tak nieurodzajne, jak niegdzie indziej. Król dbał tylko o siebie. Na dodatek był pyszałkiem. Twierdził mianowicie, iż tak świetnie gra w szachy, że nikt na świecie nie jest w stanie go pokonać. Wielu już próbowało zmierzyć się z królem, nawet z dalekich księstw przyjeżdżali, ale nikomu się to nie udało.

Pewnego dnia przyszedł do króla biedny chłop w zniszczonym odzieniu i poprosił władcę o garść ziarna dla swoich głodnych dzieci. Król najpierw odmówił, ale że był w tym dniu w dobrym humorze, bo wygrał już 50 partii szachów, stwierdził:

— Niech ci będzie, chłopie. Dam ci ziarno, ale nie za darmo. Zagramy w szachy (i tak na pewno wygram – pomyślał równocześnie król). Jak wygrasz, to dam ci tyle ziarna, ile sobie wyobrazisz, a jak przegrasz – wylądujesz w lochu więziennym.

Chłop nie miał nic do stracenia, więc się zgodził.

Zegrali raz – i chłop wygrał. Król podenerwowany stwierdził, że mu słońce w oczy świeciło i gra jest nieważna.

Zegrali drugi raz – chłop znowu wygrał. Tym razem królowi przeszkadzały śpiewające na dworze ptaki, więc rozgrywka znowu została unieważniona.

Zegrali zatem trzeci raz. I tym razem chłop wygrał. Król rozżłościł się, ale co powiedział, to powiedział, gry anulować już nie wypadało i nagrodę wypłacić musiał.

— To ile tego ziarna chcesz? — zapytał — „Pewnie głupi jest i powie, że chce worek. Dam mu i będę miał go z głowy” — pomyślał władca.

— Dzięki ci królu. Nie chcę od ciebie wiele. Twoje zapasy ziarna nie ucierpią jak mi dasz trochę, a i moje dzieci będą najedzone.

— No, to ile tego chcesz?

— Wezmę, panie, tyle ziarna, ile ułożysz na tej szachownicy, ale kładź dla porządku tak: na pierwsze pole połóż jedno ziarno, na drugie pole dwakroć tyle, co na pierwszym, na trzecie – dwakroć tyle, co na poprzednim, i tak dalej, aż do ostatniego pola. Nic więcej nie chcę.

Może i władca ten umiał grać w szachy, ale głupi był i matematyki nie znał, dlatego się zgodził. A chłop, choć biedny, to sprytny i na swoje wyszedł.

- Jak sądzisz, drogi Czytelniku, ile ziaren musiał dać władca chłopu?
- Ile to całe ziarno ważyło, jeżeli jedno ziarenko waży 0,01 g?
- Jak grubą warstwą pokryłoby to ziarno Polskę, skoro powierzchnia Polski wynosi około 10^{11} m², a objętość ziarenka to około $5 \cdot 10^{-8}$ m³?
- Ile czasu zajmie królowi odliczenie tej ilości ziarna, jeżeli odlicza garść (100 ziaren) na sekundę? A ile, gdyby król wykorzystał maszynę odliczającą milion ziaren na sekundę?

JAK KRÓL ZBANKRUTOWAŁ, CZYLI ROZWIĄZANIE ZAGADEK Z BAJKI O KRÓLU SZACHIŚCIE

Zacznijmy od wyznaczenia liczby ziaren, jakie król musiał wypłacić chłopu.

Standardowa szachownica jest kwadratem podzielonym na pola. Pola te ułożone są w osiem rzędów, a w każdym rzędzie jest osiem pól – zatem na szachownicy mamy 64 pola. Niech N oznacza łączną liczbę wypłaconych ziaren. Równa ona jest następującej sumie:

$$N = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

Suma ta składa się z 64 składników – tylu, ile mamy pól na szachownicy. Wypisanie wszystkich składników sumy jest niemożliwe, ponieważ – jak można się łatwo samodzielnie przekonać – kolejne liczby szybko stają się zbyt długie. Aby obliczyć tę sumę, zapiszmy ją nieco inaczej:

$$N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63}$$

Wykładnik w ostatnim członie to „63” a nie „64”, ponieważ numerowanie wykładników zaczęliśmy od zera, a nie od jedynki. Jest to suma skończonego, 64-elementowego szeregu geometrycznego. Wzór na taką sumę jest znany:

$$S = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

U nas: $S = N$; $a_1 = 2^0 = 1$; $q = 2$ oraz $n = 64$. Podstawiając te wartości liczbowe uzyskujemy:

$$N = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 1,8 \cdot 10^{19}$$

Jest to bardzo duża liczba. Ale czy potrafimy ją sobie wyobrazić? W celu uzmysłowienia sobie rozmiarów tej liczby dokonamy kilku porównań.

* * *

Na początek porównamy masę M całego, należnego chłopu ziarna, z masą piramidy Cheopsa M_Δ . Uwzględniając masę jednego ziarenka $m = 10^{-5}$ kg, możemy obliczyć M :

$$M = N \cdot m \approx 1,8 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 1,8 \cdot 10^{14} \text{ kg}$$

Biorąc z tablic masę piramidy Cheopsa $M_\Delta = 6 \cdot 10^9$ kg uzyskujemy, że:

$$M \approx 30\,000 M_\Delta$$

czyli całe wyplacone ziarno ważyłoby przeszło trzydzieści tysięcy razy więcej niż piramida Cheopsa!

* * *

Innym zobrazowaniem „rozmiarów” liczby N jest wyznaczenie grubości h warstwy, jaką pokryłoby to ziarno całą Polskę.

Objętość jednego ziarnka to w przybliżeniu $V_z = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$. Całe wyplacone ziarno zajmuje wówczas objętość:

$$V = N \cdot V_z$$

Z drugiej strony, objętość warstwy o grubości h pokrywającej Polskę wynosi:

$$V = h \cdot S_p$$

gdzie S_p to pole powierzchni Polski;

$$S_p = 10^{11} \text{ m}^2$$

Stąd otrzymujemy:

$$N \cdot V_z = h \cdot S_p$$

$$h = V_z \cdot N / S_p$$

co po podstawieniu wartości liczbowych daje:

$$h \approx 1,8 \cdot 10^{19} \cdot 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 / 10^{11} \text{ m}^2 = 9 \text{ m}$$

Zatem ziarno to pokryłoby Polskę warstwą o grubości 9 metrów, czyli zakryłoby nasz kraj aż do drugiego piętra!

* * *

W końcu zajmijmy się czasem, jaki zajęłoby królowi wypłacenie nagrody. Jeżeli król przekazuje chłopu ziarno z prędkością równą jednej garści (czyli w przybliżeniu 100 ziaren) na sekundę, to musi na to przeznaczyć t sekund. Czas ten wyznaczmy z następującej proporcji:

100 ziaren — 1 sekunda

N ziaren — t sekund

czyli

$$t = N \text{ ziaren} \cdot 1 \text{ sekunda} / 100 \text{ ziaren}$$

Podstawiając wartość liczbową otrzymujemy:

$$t \approx 184\,467\,440\,737\,095\,516 \text{ s}$$

Dzieląc tę wartość przez 360, czyli przez liczbę sekund w godzinie, następnie przez 24 – liczbę godzin w dobie, oraz przez 365 – liczbę dni w roku, otrzymujemy czas wyrażony w latach:

$$t \approx 5\,849\,424\,173 \text{ lat} \approx 5,8 \cdot 10^9 \text{ lat}$$

Dla porównania wiek naszego układu słonecznego wynosi ok. $4,8 \cdot 10^9$ lat. Czyli król musiałby wypłacać nagrodę chłopu dłużej niż istnieje nasz układ słoneczny!

W przypadku maszyny wydającej milion ziaren na sekundę (co przy założeniu masy jednego ziarnka równej 10^{-5} kg daje 10 kg ziarna w ciągu sekundy) sytuacja jest nieco lepsza. Przeprowadzając analogiczne obliczenia, otrzymujemy:

$$t' \approx 584\,942 \text{ lat}$$

Ten wynik jest „lepszy” niż poprzedni, ale także w tym przypadku nie tylko król, ale i wiele następujących po nim pokoleń musiałoby spłacać dług chłopu i jego potomkom.